

清华大学

大学数学实验

大学数学实验

大学数学实验

Experiments in Mathematics

实验6 非线性方程求解

清华大学数学科学系

1

2

3

清华大学

大学数学实验

大学数学实验

大学数学实验

什么叫方程（组）？

方程：包含未知数（或/和未知函数）的等式

方程组：包含未知数（或/和未知函数）的一组等式

不包含未知函数的方程组的一般形式： $F(x)=0$

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T, F(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_m(x))^T$ （一般 $m=n$ ）

满足方程（组）的未知数的取值称为方程（组）的解，或称为 $F(x)$ 的零点。

单变量方程（一元方程）： $f(x)=0$ ，“解”也称为“根”

1

2

3

清华大学

大学数学实验

大学数学实验

大学数学实验

非线性方程的特点

方程分类：

- 代数方程： $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$ ；
- 超越方程：包含超越函数(如 $\sin x, \ln x$ )的方程；
- 非线性方程： $n(\geq 2)$ 次代数方程和超越方程。

方程根的特点：

- $n$ 次代数方程有且只有 $n$ 个根(包括复根、重根)；
- 5次以上的代数方程无求根公式；
- 超越方程有无根，有几个根通常难以判断。

1

2

3

清华大学

大学数学实验

大学数学实验

大学数学实验

实验6的基本内容

- 非线性方程  $f(x)=0$  的数值解法：
  - 迭代方法的基本原理；
  - 牛顿法；拟牛顿法。
- 推广到解非线性方程组
- 实际问题中非线性方程的数值解
- 分岔和混沌现象

1

2

3

清华大学

大学数学实验

大学数学实验

大学数学实验

实例1 路灯照明

道路两侧分别安装路灯，在漆黑的夜晚，当两只路灯开启时，两只路灯连线的路面上最暗的点和最亮的点在哪里？

- 如果 $P_2$ 的高度可以在3米到9米之间变化，如何使路面上最暗点的亮度最大？
- 如果两只路灯的高度均可以在3米到9米之间变化呢？

$s=20(\text{米})$   
 $P_1=2, P_2=3(\text{千瓦})$   
 $h_1=5, h_2=6(\text{米})$

1

2

3

清华大学

大学数学实验

大学数学实验

大学数学实验

实例1 路灯照明

建立坐标系如图，两个光源在点 $Q(x,0)$ 的照度分别为

$I_1 = k \frac{P_1 \sin \alpha_1}{r_1^2}, \quad I_2 = k \frac{P_2 \sin \alpha_2}{r_2^2}$ 

$(k$ 是由量纲单位决定的比例系数，不妨记 $k=1)$

点 $Q$ 的照度  $C(x) = \frac{P_1 h_1}{\sqrt{(h_1^2 + x^2)^3}} + \frac{P_2 h_2}{\sqrt{(h_2^2 + (s-x)^2)^3}}$

$r_1^2 = h_1^2 + x^2, \quad r_2^2 = h_2^2 + (s-x)^2$   
 $\sin \alpha_1 = \frac{h_1}{r_1} = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + x^2}}$   
 $\sin \alpha_2 = \frac{h_2}{r_2} = \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + (s-x)^2}}$

1

2

3

大学数学实验

### 实例1 路灯照明

为求最暗点和最亮点, 先求 $C(x)$ 的驻点

$$C'(x) = -3 \frac{P_1 h_1 x}{\sqrt{(h_1^2 + x^2)^3}} + 3 \frac{P_2 h_2 (s-x)}{\sqrt{(h_2^2 + (s-x)^2)^3}}$$

令 $C'(x)=0$ : 解析解是难以求出, 需数值求解

$$C(x) = \frac{P_1 h_1}{\sqrt{(h_1^2 + x^2)^3}} + \frac{P_2 h_2}{\sqrt{(h_2^2 + (s-x)^2)^3}}$$

大学数学实验

### 实例2 均相共沸混合物的组分

均相共沸混合物 (homogeneous azeotrope) 是由两种或两种以上物质组成的液体混合物, 当在某种压力下被蒸馏或局部汽化时, 在气体状态下和在液体状态下保持相同的组分 (比例)

给定几种物质, 如何确定它们构成均相共沸混合物时的比例?

**模型建立**

设该混合物由 $n$ 个可能的物质组成, 物质 $i$ 所占的比例为 $x_i$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0$$

大学数学实验

### 实例2 均相共沸混合物的组分

均相共沸混合物应该满足**稳定条件**, 即共沸混合物的每个组分在气体和液体状态下具有相同的化学势能。在压强 $P$ 不大的情况下, 这个条件可以表示为:  $P = \gamma_i P_i, \quad i = 1, \dots, n$

$P_i$ 是物质 $i$ 的饱和汽相压强, 与温度 $T$ 有关, 可以如下确定:

$$\ln P_i = a_i - \frac{b_i}{T + c_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (a_i, b_i, c_i \text{ 是常数})$$

$\gamma_i$ 是组分 $i$ 的液相活度系数, 可以根据如下表达式确定:

$$\ln \gamma_i = 1 - \ln \left( \sum_{j=1}^n x_j q_{ij} \right) - \sum_{j=1}^n \frac{x_j q_{ji}}{\sum_{k=1}^n x_k q_{jk}}, \quad i = 1, \dots, n$$

( $q_{ij}$ 表示组分 $i$ 与组分 $j$ 的交互作用参数, 可以通过实验近似得到)

大学数学实验

### 实例2 均相共沸混合物的组分

$$P = \gamma_i P_i \quad \ln P_i = a_i - \frac{b_i}{T + c_i} \quad \ln \gamma_i = 1 - \ln \left( \sum_{j=1}^n x_j q_{ij} \right) - \sum_{j=1}^n \frac{x_j q_{ji}}{\sum_{k=1}^n x_k q_{jk}}$$

$$\rightarrow \frac{b_i}{T + c_i} + \ln \left( \sum_{j=1}^n x_j q_{ij} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{x_j q_{ji}}{\sum_{k=1}^n x_k q_{jk}} - 1 - a_i + \ln P = 0$$

只有当物质 $i$ 参与到该共沸混合物中时才需要满足上式, 故得到

$$x_i \left( \frac{b_i}{T + c_i} + \ln \left( \sum_{j=1}^n x_j q_{ij} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{x_j q_{ji}}{\sum_{k=1}^n x_k q_{jk}} - 1 - a_i + \ln P \right) = 0$$

$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$

解析解是难以求出, 需数值求解

大学数学实验

### 非线性方程的基本解法

解方程 $f(x)=0$ 第一步——确定根的大致范围

- 图形法: 作 $f(x)$ 图形, 观察 $f(x)$ 与 $x$ 轴的交点
- 根的隔离: 二分法

**图形法**

$$x^6 - 2x^4 - 6x^3 - 13x^2 + 8x + 12 = 0$$

有4个根分别位于

$x = -1.75, -0.75, 1.00, 2.40$ 附近

大学数学实验

### 非线性方程的基本解法

**二分法的原理** 若对于 $a < b$ , 有 $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则在 $(a, b)$ 内 $f(x)$ 至少有一个零点, 即 $f(x) = 0$ 至少有一个根。

**二分法的实现**

$f(x_0) > 0 \Rightarrow a_1 = a, b_1 = x_0$   $f(x_0) < 0 \Rightarrow a_1 = x_0, b_1 = b$

$(a, b) \Rightarrow (a_1, b_1) \Rightarrow \dots \Rightarrow (a_n, b_n) \Rightarrow \dots$  区间每次缩小一半,  $n$ 足够大时, 可确定根的范围

**不足** 收敛速度较慢

非线性方程迭代法的基本思想

将原方程  $f(x)=0$  改写成容易迭代的形式  $x=\varphi(x)$ , 选合适的初值  $x_0$ , 进行迭代:  $x_{k+1}=\varphi(x_k)$  ( $k=0,1,2,\dots$ )

例1  $f(x)=x^2+x-14=0 \Rightarrow x=\varphi(x)$   
 $f(3)=-2, f(4)=6$  存在根  $x \in (3,4)$

$x=\varphi_1(x)=14-x^2$ , 迭代公式:  $x_{k+1}=14-x_k^2$   
 $x=\varphi_2(x)=14/(x+1)$ , 迭代公式:  $x_{k+1}=14/(x_k+1)$   
 $x=\varphi_3(x)=x-(x^2+x-14)/(2x+1)$ ,  
 迭代公式:  $x_{k+1}=x_k-(x_k^2+x_k-14)/(2x_k+1)$

非线性方程的迭代法 (例)

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$\varphi_1$	3.0000	5.0000	-11.0000	-107.0000		
$\varphi_2$	3.0000	3.5000	3.1111	3.4054	3.1779	3.3510
$\varphi_3$	3.0000	3.2857	3.2749	3.2749	3.2749	3.2749

$x_{1,2} = \frac{(-1 \pm \sqrt{1+14 \times 4})}{2}, x^* = \frac{(-1 + \sqrt{57})}{2} \approx 3.2749$

$\varphi_1$  根本不收敛;  $\varphi_2$  虽呈现收敛趋势, 但很慢;  $\varphi_3$  收敛很快。

迭代法的几何解释

$x_{k+1}=\varphi(x_k), k=0,1,\dots$  不动点  $x^*=\varphi(x^*)$

$\{x_k\}$  收敛于  $x^*$   $\Rightarrow$  取决于曲线  $\varphi(x)$  的斜率  $\{x_k\}$  不收敛于  $x^*$

迭代法的收敛性

设  $y=\varphi(x)$  在  $a \leq x \leq b$  连续, 且  $a \leq y \leq b$ , 若存在  $L < 1$  使  $|\varphi'(x)| \leq L$ , 则  $x=\varphi(x)$  在  $a \leq x \leq b$  有唯一解  $x^*$ , 且

- 1) 对于  $x_0 \in (a,b)$ , 迭代公式  $x_{k+1}=\varphi(x_k)$  ( $k=0,1,2,\dots$ ) 产生的序列  $\{x_k\}$  收敛于  $x^*$ ;
- 2)  $|x_{k+1}-x^*| \leq L|x_k-x^*|, |x_k-x^*| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$ .

$L$  不易确定  $\Rightarrow$  放宽定理条件, 缩小初值范围

**局部收敛性:** 只要  $\varphi(x)$  在  $x^*$  的一个邻域连续且  $|\varphi'(x^*)| < 1$ , 则对于该邻域内的任意初值  $x_0$ , 序列  $\{x_k\}$  就收敛于  $x^*$ .

迭代法的收敛速度 (收敛阶)

记  $e_k = x_k - x^*$ , 若  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = c \neq 0$  ( $p$  为一正数)

称序列  $\{x_k\}$   $p$  阶收敛。显然,  $p$  越大收敛越快。

$\varphi(x_k) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x_k - x^*) + \dots + \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}(x_k - x^*)^p + \dots$

$\Rightarrow e_{k+1} = \varphi'(x^*)e_k + \dots + \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}e_k^p + \dots$

$\varphi'(x^*) \neq 0, \{x_k\}$  1阶收敛 (线性收敛)

$\varphi'(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0, \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0, \{x_k\}$   $p$  阶收敛

迭代法的收敛速度 (例)

例题  $f(x)=x^2+x-14=0 \quad \varphi_2(x)=14/(x+1)$

$\varphi_2'(x) = \frac{-14}{(x+1)^2}, \varphi_2'(x^*) \neq 0 \Rightarrow \{x_k\}$  1阶收敛

$\varphi_3(x) = x - (x^2 + x - 14)/(2x + 1)$

$\varphi_3'(x) = \frac{2(x^2 + x - 14)}{(2x + 1)^2}, \varphi_3'(x^*) = 0,$

$\varphi_3''(x^*) \neq 0 \Rightarrow \{x_k\}$  2阶收敛

结论:  $\varphi(x)$  的构造决定收敛速度

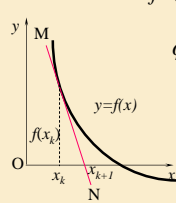
大学数学实验

### 牛顿切线法

$f(x)$  在  $x_k$  作 Taylor 展开, 去掉 2 阶及 2 阶以上项得

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

设  $f'(x_k) \neq 0$ , 用  $x_{k+1}$  代替右端的  $x$ , 由  $f(x) = 0$  得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \text{即令 } \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$


$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2}, \quad \varphi''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

若  $x^*$  为单根  $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0, f''(x^*) \neq 0$

$$\Rightarrow \varphi'(x^*) = 0, \varphi''(x^*) \neq 0$$

牛顿切线法 2 阶收敛

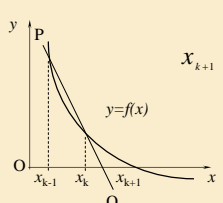
大学数学实验

若  $x^*$  为重根  $f(x^*) = f'(x^*) = 0 \Rightarrow \varphi'(x^*) \neq 0$

牛顿切线法 1 阶收敛 重数越高, 收敛越慢

**牛顿割线法**

用差商  $\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$  代替  $f'(x_k)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$


收敛速度比牛顿切线法稍慢

$x^*$  为单根时收敛阶数是 1.618

大学数学实验

### 解非线性方程组的牛顿法

解方程  $f(x)=0$   $f(x^{k+1}) = f(x^k) + f'(x^k)(x^{k+1} - x^k)$

的牛顿切线法

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

推广到解方程组

$$F(x) = 0, \quad x = [x_1, \dots, x_n]^T, \quad F(x) = [f_1(x), \dots, f_n(x)]^T$$

$$f_i(x^{k+1}) = f_i(x^k) + \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_1}(x_1^{k+1} - x_1^k)$$

$$+ \dots + \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_n}(x_n^{k+1} - x_n^k), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

大学数学实验

### 解非线性方程组的牛顿法

$$F(x) = 0, \quad x = [x_1, \dots, x_n]^T, \quad F(x) = [f_1(x), \dots, f_n(x)]^T$$

$$F'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

解方程  $f(x)=0$

$$f(x^{k+1}) = f(x^k) + f'(x^k)(x^{k+1} - x^k)$$

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

$$F(x^{k+1}) = F(x^k) + F'(x^k)(x^{k+1} - x^k)$$

$$x^{k+1} = x^k - [F'(x^k)]^{-1} F(x^k)$$

$$\Rightarrow F'(x^k) \Delta x^k = -F(x^k) \quad x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$$

大学数学实验

### 拟牛顿法(Quasi-Newton)

解方程  $f(x)=0$   $f(x^{k+1}) = f(x^k) + a^k(x^{k+1} - x^k)$

的牛顿割线法

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{a^k} \quad a^k = \frac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}}$$

解方程组的拟牛顿法——用  $A^k$  代替  $F'(x^k)$

使  $A^k$  满足  $A^k(x^k - x^{k-1}) = F(x^k) - F(x^{k-1})$

矩阵  $A^k$  ( $n^2$  个未知数) 不能由这样的  $n$  个方程确定

用迭代方法  $A^k = A^{k-1} + \Delta A^{k-1}$  ( $\Delta A$  有不同的构造) 计算  $A^k$

再求  $x^{k+1} = x^k - (A^k)^{-1} F(x^k)$

大学数学实验

### MATLAB 优化工具箱解非线性方程

**fzero:** 单变量方程  $f(x)=0$  求根(变号点)

**最简形式**  $x = \text{fzero}(@f, x_0)$

**必须输入:** 'f' 为 f.m 函数名, 'x0' 是迭代初值(或有根区间)

**输出:** 'x' 是变号点的近似值(函数不连续时不一定是根)

**一般形式**  $[x, fv, ef, out] = \text{fzero}(@f, x_0, \text{opt}, P1, P2, \dots)$

**可选输入:** "P1, P2, ..." 是传给 f.m 的参数(如果需要的话)

'opt' 是一个结构变量, 控制参数(如精度 TolX)

opt 可用 optimset 设定, 不指定或指定为 '[]' 时将采用缺省值

如:  $\text{opt} = \text{optimset}('TolX', 1e-8)$

**输出:** 'fv' 是函数值; 'ef' 是程序停止运行的原因(1, 0, -1);

'out' 是一个结构变量, 包含:

iterations(迭代次数), funcCount(函数调用次数), algorithm(所用算法)

**演示:** exampleFzero.m

**MATLAB优化工具箱解非线性方程组**

**fsolve: 多变量方程组 $F(x)=0$ 求解**

$x = \text{fsolve}(@f, x0)$  最简形式

$[x, fv, ef, out, jac] = \text{fsolve}(@f, x0, \text{opt}, P1, P2, \dots)$  一般形式

输入 —— 与fzero类似, 但:

'x0'是迭代初值,

'opt'中控制参数更多(如MaxFunEvals, MaxIter等)

输出 —— 与fzero类似, 但:

'out'中还输出'firstorderopt', 即结果(x点)处梯度向量的范数(实际上是1-范数, 即分量按绝对值取最大的值);

'jac'输出x点所对应的雅可比矩阵

注: solve函数也可求解(符号工具箱)

**MATLAB优化工具箱解非线性方程**

**牛顿法**

需自行编制程序, 如对切线法编写名为 newton.m 的 m 文件

**多项式求根**

当  $f(x)$  为多项式时可用

$r = \text{roots}(c)$  输入多项式的系数  $c$  (按降幂排列), 输出  $r$  为  $f(x) = 0$  的全部根;

$c = \text{poly}(r)$  输入  $f(x) = 0$  的全部根  $r$ , 输出  $c$  为多项式的系数 (按降幂排列);

$df = \text{polyder}(c)$  输入多项式的系数  $c$  (按降幂排列), 输出  $df$  为多项式的微分的系数。

**求解 $f(x)=0$ 的newton.m文件**

```
function [y,z]=newton(fv,df,x0,n,tol)
x(1)=x0; y=x0; b=1; k=1;
while abs(b)>tol*abs(x(k))
    x(k+1)=x(k)-feval(fv,x(k))/feval(df,x(k));
    b=x(k+1)-x(k);
    y=x(k+1);
    k=k+1;
    if(k>n)
        error('Error: Reached maximum iteration times');
    end
end
k=k-1;

fv=f(x)的函数句柄, df=f'(x)的函数句柄
```

Newton.m

例 解  $x_1^2 + x_2^2 = 4, x_1^2 - x_2^2 = 1$

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 \end{bmatrix}, \quad F'(x) = 2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & -x_2 \end{bmatrix}$$

$F'(x^k)\Delta x^k = -F(x^k), \quad x^{k+1} = x^k + \Delta x^k, \quad k = 0, 1, \dots$

取  $x^0 = (1, 1)^T$

演示 exam0602Newton.m;  
exam0602Fsolve.m;  
exam0602Solve.m

	k	$x^k$
	0	(1.000000, 1.000000)
	1	(1.750000, 1.250000)
	2	(1.589286, 1.225000)
	3	(1.581160, 1.224645)
	4	(1.581139, 1.224745)
	5	(1.581139, 1.224745)

精确解  $x = (\sqrt{5/2}, \sqrt{3/2})^T$   
 $= (1.58113883, 1.22474487)^T$

**实例1 路灯照明**

$$C(x) = \frac{P_1 h_1}{\sqrt{(h_1^2 + x^2)^3}} + \frac{P_2 h_2}{\sqrt{(h_2^2 + (s-x)^2)^3}} \quad P_1 = 2, P_2 = 3$$

$$h_1 = 5, h_2 = 6, s = 20$$

$$C'(x) = -3 \frac{P_1 h_1 x}{\sqrt{(h_1^2 + x^2)^5}} + 3 \frac{P_2 h_2 (s-x)}{\sqrt{(h_2^2 + (s-x)^2)^5}} = 0$$

$C(x)$  有3个驻点: (9,10)内的是最小点, 0或20附近的是最大点

**实例1 路灯照明**

```
function y=zhaoming(x)
y=2*5/(5^2+x^2)^(5/2)-3*6*(20-x)/(6^2+(20-x)^2)^(5/2);

x0=[0,10,20];
for k=1:3
    x(k)=fzero(@zhaoming,x0(k));
    c(k)=2*5/(5^2+x(k)^2)^(3/2)+3*6/(6^2+(20-x(k))^2)^(3/2);
end
[x;c]
```

x	0	0.02848997	9.33829914	19.97669581	20
$C(x)$	0.08197716	0.08198104	0.01824393	0.08447655	0.08447468

$x = 9.3383$  是  $C(x)$  的最小值点,  $x = 19.9767$  是  $C(x)$  的最大值点

实例1 路灯照明

问题:  $P_2=3$ 千瓦路灯的高度在3~9米变化, 如何使路面上最暗点的照度最大?

$$C(x, h_2) = \frac{P_1 h_1}{\sqrt{(h_1^2 + x^2)^3}} + \frac{P_2 h_2}{\sqrt{(h_2^2 + (s-x)^2)^3}}$$

$$\frac{\partial C}{\partial h_2} = \frac{P_2}{\sqrt{(h_2^2 + (s-x)^2)^3}} - 3 \frac{P_2 h_2}{\sqrt{(h_2^2 + (s-x)^2)^5}} = 0 \Rightarrow h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(s-x)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -3 \frac{P_1 h_1 x}{\sqrt{(h_1^2 + x^2)^5}} + 3 \frac{P_2 h_2 (s-x)}{\sqrt{(h_2^2 + (s-x)^2)^5}} = 0 \Rightarrow \frac{9\sqrt{3}P_1 h_1 x}{\sqrt{(h_1^2 + x^2)^5}} - \frac{4P_2}{(s-x)^3} = 0$$

用fzero命令解方程, 得到的结果是:  
 $x=9.5032, h_2=7.4224, C(x, h_2)=0.018556$ (最暗点的最大照度)

实例1 路灯照明

问题: 讨论两只路灯的高度均可以在3~9米之间变化的情况

$$C(x, h_1, h_2) = \frac{P_1 h_1}{\sqrt{(h_1^2 + x^2)^3}} + \frac{P_2 h_2}{\sqrt{(h_2^2 + (s-x)^2)^3}}$$

$$\frac{\partial C}{\partial h_1} = 0 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x$$

$$\frac{\partial C}{\partial h_2} = \frac{P_2}{\sqrt{(h_2^2 + (s-x)^2)^3}} - 3 \frac{P_2 h_2}{\sqrt{(h_2^2 + (s-x)^2)^5}} = 0 \Rightarrow h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(s-x)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -3 \frac{P_1 h_1 x}{\sqrt{(h_1^2 + x^2)^5}} + 3 \frac{P_2 h_2 (s-x)}{\sqrt{(h_2^2 + (s-x)^2)^5}} = 0 \Rightarrow \frac{P_1}{x^3} = \frac{P_2}{(s-x)^3}$$

$$x = \frac{\sqrt[3]{P_1 s}}{\sqrt[3]{P_1} + \sqrt[3]{P_2}}$$

实际数据计算, 得到 $x=9.3253$ , 最暗点的照度达到最大的路灯高度  $h_1=6.5940, h_2=7.5482$

实例1 路灯照明

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x$$

$$h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(s-x)$$

$$x = \frac{\sqrt[3]{P_1 s}}{\sqrt[3]{P_1} + \sqrt[3]{P_2}}$$

讨论1: 若 $P_1=P_2$ , 则 $x=0.5s$ (中点), 与直觉符合  
 讨论2:  $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2 = \sqrt{2}/2 \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 35^\circ 16'$   
 (这个角度与路灯的功率和道路宽度均无关)  
 思考: 2只以上路灯的情形 (如篮球场四周安装照明灯)

实例2 均相共沸混合物的组分

$$x_i \left( \frac{b_i}{T + c_i} + \ln \left( \sum_{j=1}^n x_j q_{ij} \right) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{x_j q_{ji}}{\sum_{k=1}^n x_k q_{jk}} \right) - 1 - a_i + \ln P \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \Rightarrow x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \quad n \text{ 个变量: } T, x_i$$

给定 $n=3$ 种物资: 丙酮、乙酸甲脂、甲醇(分别记为1、2、3)

$a_1=16.388, a_2=16.268, a_3=18.607;$	$P=760 \text{ (mmHg)}$
$b_1=2787.50, b_2=2665.54,$	$Q=[1.0 \quad 0.48 \quad 0.768$
$b_3=3643.31;$	$\quad 1.55 \quad 1.0 \quad 0.544$
$c_1=229.66, c_2=219.73, c_3=239.73;$	$\quad 0.566 \quad 0.65 \quad 1.0 \quad ]$

实例2 均相共沸混合物的组分

```
function f=azeofun(XT,n,P,a,b,c,Q)
n=3;
x(n)=1;
P=760;
for i=1:n-1
    a=[16.388,16.268,18.607]';
    b=[2787.50,2665.54,3643.31]';
    c=[229.66,219.73,239.73]';
    Q=[1.0 0.48 0.768
        1.55 1.0 0.544
        0.566 0.65 1.0];
    XT0=[0.333,0.333,50];
    [XT,Y]=fsolve(@azeofun,XT0,[n,P,a,b,c,Q])
end
T=XT(n);
p=log(P);
for i=1:n
    d(i)=x * Q(i,1:n)';
    dd(i)=x(i)/d(i);
end
for i=1:n
    f(i)=x(i)*(b(i)/(T+c(i)) + log(x*Q(i,1:n)'))
    + dd*Q(1:n,i) - a(i) - 1 + p;
end
```

XT = [0.2740 0.4636 54.2560]  
 Y = 1.0e-006 \*  
 [0.4195 -0.3112 0.2083]

实例2 均相共沸混合物的组分

初值	解			
XT0	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$T$
[0.333, 0.333, 50]	0.2740	0.4636	0.2624	54.2560
[0, 0.5, 54]	0.0000	0.6766	0.3234	54.3579
[0.5, 0, 54]	0.7475	0.0000	0.2525	54.5040
[0.5, 0.5, 54]	0.5328	0.4672	0.0000	55.6764



清华大学

大学数学实验

分岔与混沌现象

离散形式的阻滞增长模型（见实验2）

$$x_{k+1} - x_k = r(1 - \frac{x_k}{N})x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$(x_k \text{ 是第 } k \text{ 代的种群数量, } r \text{ 是固有增长率, } N \text{ 是种群最大容量})$

问题：种群数量总是趋于稳定吗？

取  $N=1$ ,  $r=0.3, 1.8, 2.2, 2.5, 2.55, 2.7$ , 初值  $x_0=0.1$ , 按照迭代方程用MATLAB计算  $x_k$ , 观察得到结果

清华大学

大学数学实验

分岔与混沌现象

清华大学

大学数学实验

分岔与混沌现象

$$x_{k+1} - x_k = r(1 - \frac{x_k}{N})x_k \quad y_{k+1} = f(y_k) = by_k(1 - y_k)$$

$$y_k = \frac{r}{(r+1)N} x_k, \quad b = r+1 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

平衡点  $y=y^*=1-1/b$ （相应于  $x^*=N$ ）稳定的条件为  $|f'(y^*)| < 1$   
 即  $1 < b < 3, 0 < r < 2$

清华大学

大学数学实验

分岔与混沌现象

隔代收敛分析

$$y_{k+2} = f(y_{k+1}) = f(f(y_k)) = f^{(2)}(y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$y = f^{(2)}(y) = bby(1-y)[1-by(1-y)]$$

平衡点(除  $y=y^*=1-1/b$  外)  $y_{1,2}^* = \frac{b+1 \pm \sqrt{b^2-2b-3}}{2b}$

$0 < y_1^* < y_2^* < 1, \quad y_1^* = f(y_2^*), \quad y_2^* = f(y_1^*)$

平衡点  $y_{1,2}^*$  稳定的条件是  $|f^{(2)}(y_{1,2}^*)'| < 1$

$$(f^{(2)}(y_{1,2}^*))' = f'(y_1^*)f'(y_2^*) = b^2(1-2y_1^*)(1-2y_2^*)$$

$$b < 1 + \sqrt{6} \approx 3.449 \quad r < 2.449$$

清华大学

大学数学实验

分岔与混沌现象

类似地可以得到：迭代方程有4个稳定平衡点的条件  
 $3.449 < b < 3.544 \quad 2.449 < r < 2.544$

记有  $2^n$  个收敛子序列的  $b$  的上限为  $b_n$ , 上面的分析给出：  
 $b_0=3, b_1=3.449, b_2=3.544$

进一步研究表明：当  $n \rightarrow \infty$  时  $b_n \rightarrow 3.57$ , 若  $b > 3.57$  (即  $r > 2.57$ ), 就不再存在任何  $2^n$  收敛子序列, 序列  $x_k$  的趋势似乎呈现一片混乱, 这就是所谓混沌现象 (Chaos)。

混沌现象实际上有其内在的规律性, 如  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{b_{n+1} - b_n} = 4.6692 \dots$

是普遍存在于不同混沌现象中的常数(费根鲍姆常数)


清华大学

大学数学实验

分岔与混沌现象

混沌现象的一个典型特征是对初始条件的敏感性  
 • “差之毫厘，失之千里”  
 • 著名的“蝴蝶效应”

非线性迭代过程 ---- 混沌现象 ---- 非线性科学



清华大学

大学数学实验

分岔与混沌现象

```
function chaos(iter_fun,x0,r,n) % 该函数没有返回值; iter_fun是迭代函数(句柄); x0是迭代初值;
kr=0;
for rr=r(1):r(3):r(2)
% 输入中[r(1),r(2)]是参数变化的范围, r(3) 是步长
    kr=kr+1;
    y(kr,1)=feval(iter_fun,x0,rr);
    for i=2:n(2)
%输入中n(2)是迭代序列的长度, 但画图时前n(1)个迭代值被舍弃
        y(kr,i)=feval(iter_fun,y(kr,i-1),rr);
    end
end
plot([r(1):r(3):r(2)],y(:,n(1)+1:n(2)),'k');
```

本例迭代函数为:

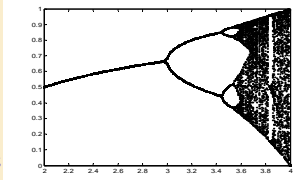
function y=iter01(x,r)

y=r\*x\*(1-x);

输入如下命令:

chaos(@iter01,0.5,[2,4,0.01],


[100,200])



1

2

3



清华大学

大学数学实验

布置实验


目的

1) 用MATLAB软件掌握求解非线性方程的迭代法和牛顿法, 并对结果作初步分析;

2) 通过实例练习用非线性方程求解的实际问题。

内容

课上布置, 或参见网络学堂



1

2

3

8